

5. cvičení - řešení

Řešení: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/2223LS_MA2/05res.pdf

Několik poznámek:

Příklad 1 (g) - alternativně lze dokázat, že neplatí nutná podmínka konvergence:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\log n}} \stackrel{(\spadesuit)}{=} \frac{1}{1} = 1 \neq 0$$

$$(\spadesuit) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \cdot \log(\log n)} \stackrel{(\clubsuit)}{=} e^0 = 1$$

$$(\clubsuit) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\log n)}{n} \stackrel{\text{L'H } \frac{\infty}{\infty} + \text{Heine}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\log n} \cdot \frac{1}{n}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot \log n} = 0$$

Příklad 2 (c) - alternativně:

$$\frac{\arctan n}{n} \geq \frac{\arctan 1}{n}$$

Lze tedy použít srovnávací kritérium, ze kterého máme, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n} \geq \arctan 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, tedy zadaná řada diverguje, neb diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Příklad 2 (e) a 2 (k): užívá se tam faktu, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \log^{\beta} n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$ a $\beta \in \mathbb{R}$ nebo $\alpha = -1$ a $\beta < -1$.